3 - Induction *Mercredi 27 mai*

Maxwell & Induction (MP)

EXERCICE 1 Moment cinétique (⋆⋆)

On considère le dispositif représenté en *Figure 1* d'un système de N charges ponctuelles (de charge q) régulièrement espacées le long d'un plateau de rayon b. Au centre du plateau, un solénoïde supposé infini ($\ell \gg a$), de densité linéique de spires n est parcouru par un courant i constant.

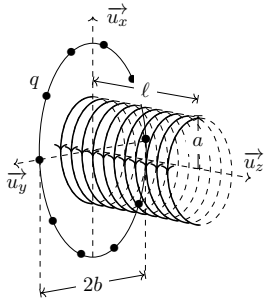


Fig 1. Dispositif électromagnétique.

1. On coupe le courant i. Que se passe-t-il ?
2. Même situation dans le cas d'une spire semi-infinie occupant la zone $z \geq 0$.

EXERCICE 2 Pendule et forces de Laplace (⋆⋆)

Une tige métallique homogène OA, de masse m et de longueur ℓ est en liaison pivot parfaite d'axe Oz avec le bâti. L'extrémité mobile A glisse sans frottement sur un profil circulaire, de sorte qu'à chaque instant l'ensemble tige-profil circulaire assure la fermeture d'un circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C, de la tige OA et de fils électriques. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et constant : $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ dirigé suivant l'axe de rotation Oz.

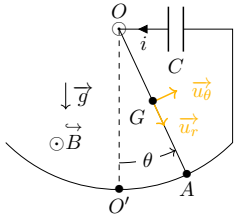


Fig 2. Pendule formant un circuit électrique.

1. Justifier qualitativement l'apparition du courant $i(t)$. Expliquer le fonctionnement du système.
2. Déterminer, dans la base locale $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ l'expression de la force de Laplace $\overrightarrow{F_L}$ s'exerçant sur la tige mobile. Quel est son point d'application ?
3. Déterminer la puissance $\mathcal{P}_L$ de la force de Laplace en fonction de B, ℓ, $\dot{\theta}$ et $i(t)$.
4. En utilisant la relation de couplage électromécanique, déterminer la force électromotrice d'induction e qui apparaît dans le circuit.
5. On néglige les chutes de tension dans les parties résistives du circuit ainsi que tout phénomène d'auto-induction. Représenter le schéma électrique équivalent et montrer que l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit s'écrit $i(t) = \frac{CB\ell^2}{2}\ddot{\theta}$.
6. Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Oz est $J_{Oz} = \frac{1}{3}m\ell^2$. En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation du mouvement de la tige.
7. En déduire que la pulsation des petites oscillations de la tige s'écrit :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{\frac{2}{3}m\ell + \frac{1}{2}CB^2\ell^3}}$$

Couplage (MP)

EXERCICE 3 Circuits RL couplés (⋆⋆)

On considère le montage de la *Figure 3*.

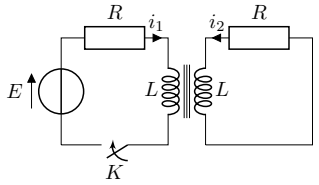


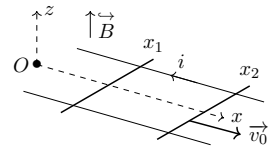
Fig 3. Circuits RL couplés.

On pose $M = kL$ l'inductance mutuelle des deux circuits, avec $0 \leq k \leq 1$ le coefficient de couplage. Pour $t < 0$ on a $i_1 = i_2 = 0$. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Déterminer et tracer $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans les cas :

1. $0 \leq k < 1$
2. $k = 1$

EXERCICE 4 Barres couplées (⋆⋆)

Les deux barres sont identiques. Elles sont posées sur deux rails conducteurs parallèles distants de a, horizontaux, de résistance électrique négligeable.



Les barres peuvent glisser sans frotter en restant orthogonales aux rails. Chaque barre a une masse m et une résistance électrique $2R$ (pour la portion se trouvant entre les deux rails). La barre de droite est lancée avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, celle de gauche étant initialement immobile. Un champ magnétique uniforme, stationnaire et vertical $\overrightarrow{B}$ règne entre les rails.

1. Déterminer le mouvement des barres grâce à un raisonnement qualitatif.
2. Établir l'expression des vitesses des barres en fonction du temps. Commenter le cas $t \to \infty$.
3. Faire une étude énergétique.

EXERCICE 5 Couplage électromécanique (⋆⋆)

On considère le montage représenté en *Figure 4*, constitué de deux barreaux de longueur ℓ aux positions x_1 et x_2, repérées par rapport à leur position d'équilibre, accrochés à des ressorts de longueur à vide ℓ_0 et de constantes de raideur identiques k.

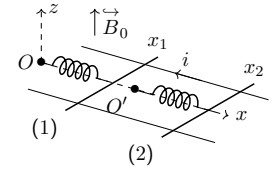


Fig 4. Dispositif expérimental.

La résistance électrique globale du circuit est R. Le circuit, initialement au repos, est plongé dans un champ magnétique extérieur homogène $\overrightarrow{B_0} = B_0\,\overrightarrow{u_z}$.

1. Préciser l'expression du flux Φ_B du champ magnétique traversant le circuit bouclé.
2. En déduire l'expression de la force électromotrice e_L et du courant induit i en fonction de $\dot{x_1}$ et $\dot{x_2}$.
3. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à chaque barreau et montrer que x_1 et x_2 vérifient des équations d'oscillateurs harmoniques :

$$\begin{cases} \ddot{x_1} + \omega_0^2 x_1 &= \alpha(\dot{x_2} - \dot{x_1}) \\ \ddot{x_2} + \omega_0^2 x_2 &= \alpha(\dot{x_1} - \dot{x_2}) \end{cases}$$

Le barreau 1 est tiré d'une longueur $x_1(0) = a$ par rapport à sa position d'équilibre (le deuxième barreau reste initialement à sa position d'équilibre) puis est lâché sans vitesse initiale.

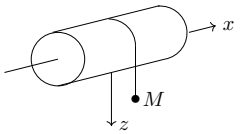
4. Résoudre le système en posant $S = x_1 + x_2$ et $D = x_2 - x_1$. On notera ω_p la pseudo-pulsation du système et λ le coefficient d'amortissement (supposé inférieur à 1).
5. Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du système {barreau 1 + barreau 2} vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = -Ri^2$$

Maxwell & Induction (MP*)

EXERCICE 6 Poulie chargée (⋆⋆⋆)

On considère un cylindre uniformément chargé en surface, de longueur ℓ et de rayon R sur lequel est enroulé un fil inextensible et sans masse retenant une masselotte M, de masse m.



On note $\omega(t)$ la vitesse de rotation du cylindre sur son axe.

1. Décrire le mouvement de la masselotte M.

EXERCICE 7 Chute d'un aimant (⋆⋆⋆)

On considère un tube cylindrique infini vertical de rayon intérieur a et d'épaisseur $\varepsilon \ll a$.

On lâche un aimant verticalement dans le tube.

1. Décrire le mouvement de l'aimant.

Données :
Champ magnétique créé par un aimant en O au point M, avec $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$:

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3\frac{\left(\overrightarrow{\mu}\cdot\overrightarrow{r}\right)\overrightarrow{r}}{r^2} - \overrightarrow{\mu}\right)$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Couplage (MP*)

EXERCICE 8 Casserole (⋆⋆⋆)

On considère une casserole remplie d'eau que l'on met sur une plaque à induction.

1. Déterminer le temps nécessaire pour que l'eau dans la casserole se mette à bouillir et déterminer la température de la casserole.

Données :

- Amplitude du champ magnétique $B_0 \simeq 15\ \mu$T.
- Résistivité électrique de la plaque : $\rho \simeq 3,0 \times 10^{-8}\ \Omega$·m.
- Rayon effectif de la plaque $R \simeq 15$ cm.
- Fréquence de fonctionnement : $f = \frac{\omega}{2\pi} \simeq 70$ kHz.
- Coefficient conducto-convectif casserole-eau : : $h \simeq 2\ \text{kW} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

EXERCICE 9 Couplage asymétriques (⋆⋆⋆)

On considère le montage de la *Figure 5*. Le circuit primaire comporte une source de tension E, une résistance R et une inductance L. Le circuit secondaire est constitué d'une résistance R et d'une inductance $L_2 = \alpha L$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$.

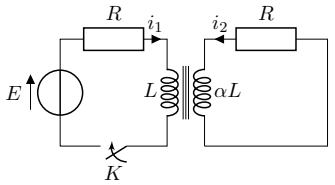


Fig 5. Circuits RL couplés asymétriques.

On pose $M = kL\sqrt{\alpha}$ l'inductance mutuelle des deux circuits, avec $0 \leq k < 1$. Pour $t < 0$, on a $i_1 = i_2 = 0$. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Déterminer les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ pour :

1. $\alpha \neq 1$
2. $\alpha = 1$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/