4 - Ondes électromagnétiques *Mercredi 3 juin*

Vide (MP)

EXERCICE 1 Double plan métallique (⋆⋆)

On considère deux plans parfaitement conducteurs, représentés en *Figure 1*, parallèles au plan Oxy d'équation $z = 0$ et $z = a$.

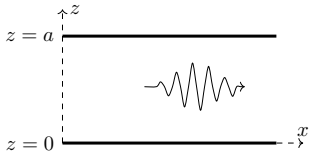


Fig 1. Double plan métallique.

Une onde électromagnétique se propage suivant la direction de l'axe (Ox), entre ces plans, dans le vide. Différents modes de propagation de l'onde sont possibles. On s'intéresse ici au mode transverse électrique (TE) et on donne l'expression du champ électrique :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E(z) \times e^{i(\omega t - kx)}\ \vec{u_y}$$

1. L'onde est-elle plane ? À l'aide de l'équation de MAXWELL-FARADAY, calculer le champ magnétique. Est-il transversal ? Pourquoi peut-on parler d'onde électrique transversale ?
2. À l'aide de l'équation de MAXWELL-AMPÈRE, établir l'équation différentielle vérifiée par $E(z)$. Vérifier les autres équations de MAXWELL.
3. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $E(z)$. Montrer qu'il existe plusieurs modes de propagation. Donner une condition sur ω. Donner l'expression de la vitesse de phase v_φ en fonction de ω mais pas de k. Y a-t-il dispersion des ondes électromagnétiques ? Y a-t-il atténuation des ondes électromagnétiques ?
4. Tracer $k(\omega)$ pour les différents modes de propagation.
5. Calculer les valeurs moyennes temporelles du vecteur de POYNTING $\vec{\Pi}$ et de la densité volumique d'énergie u_{EM}.

Plasma (MP)

EXERCICE 2 Plasma interstellaire (⋆)

Un plasma neutre est constitué d'atomes ionisés dans le vide. On note n la densité volumique d'électrons libres ainsi produits. Les ions positifs, beaucoup plus lourds, seront considérés immobiles. On étudie la possibilité de propager une onde électromagnétique plane dans ce milieu à laquelle on associe la représentation complexe $\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\ e^{j(\omega t - kx)}\ \vec{u_z}$.

1. Exprimer la représentation complexe $\underline{\gamma}$ de la conductivité du milieu.
2. Montrer que la propagation n'est possible qu'à une certaine condition sur ω.
3. On considère un train d'onde lumineux de longueur d'onde dans le vide λ_1. Quelle durée met-il à se propager sur une longueur L dans le plasma interstellaire ?
4. Montrer que pour deux trains d'ondes de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 émis de manière synchrone, le décalage à la réception de ces trains d'onde après une propagation sur une distance L est :

$$\Delta t = \frac{L\omega_p^2}{8\pi^2 c^3}\left(\lambda_2^2 - \lambda_1^2\right)$$

5. Un pulsar à une distance $L = 1$ année-lumière émet des trains d'onde à $\lambda_1 \simeq 0,4\ \mu$m et $\lambda_2 \simeq 0,8\ \mu$m. Le plasma interstellaire est caractérisé par $n \simeq 10^4$ électrons $\cdot$ m^{-3}. Le décalage temporel vous semble-t-il mesurable ?

Diélectrique (MP)

EXERCICE 3 Couche anti-reflet (⋆)

On réalise une couche anti-reflet dans le visible (pour une longueur d'onde $\lambda_0 \simeq 550$ nm) en déposant sur un verre d'indice $n_0 \simeq 1,7$ une couche d'épaisseur e et d'indice $n_1 \simeq 1,3$. On admet qu'ainsi, les ondes réfléchies respectivement sur les dioptres air-couche anti-reflet et couche anti-reflet-verre ont la même intensité I_0.

1. Quelle doit être la valeur de e pour que, sous incidence normale, la lumière réfléchie par le dispositif soit totalement supprimée ?
2. Calculer alors la fraction de lumière réfléchie pour les longueurs d'ondes $\lambda_1 \simeq 400$ nm et $\lambda_2 \simeq 750$ nm. Conclure.

Métal (MP)

EXERCICE 4 OPPH en milieu conducteur (⋆⋆)

On considère un milieu conducteur métallique dans l'ARQS de conductivité dynamique réelle γ, dans lequel se propage une onde du type :

$$\underline{\vec{E}}(x,t) = \underline{E}(x,t)\ \vec{u_y} = E_0 e^{j(\underline{k}x - \omega t)}\ \vec{u_y}$$

1. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par $\underline{E}(x,t)$.
2. En déduire la relation de dispersion puis écrire l'indice complexe du milieu sous la forme $\underline{n} = n_0 \times (1+j)$ en donnant l'expression de n_0.
3. Déterminer l'expression de la valeur moyenne du vecteur de POYNTING associé à l'onde.

Vide (MP⋆)

EXERCICE 5 Câble coaxial (⋆⋆)

On considère un câble coaxial de longueur ℓ, dont le cœur, porté au potentiel $V(t)$ et parcouru par un courant $I(t)$ a un rayon extérieur a et la gaine, fixée à la masse et parcourue par un courant $-I(t)$, a un rayon intérieur b. Une résistance R_0 connecte le cœur et la gaine en bout de câble.

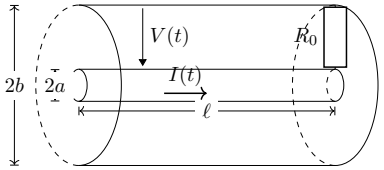


Fig 2. Câble coaxial.

1. Dans quelles conditions est-il légitime de se placer dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires ?
2. Donner l'expression des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans tout l'espace.
3. Calculer la puissance transmise à travers une section du câble.

Données :

$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z}\right)\ \vec{u_r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\ \vec{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right)\ \vec{u_z}$

Plasma (MP⋆)

EXERCICE 6 Signal extraterrestre (⋆⋆⋆)

Un capteur détecte l'onde électromagnétique représentée en *Figure 3*.

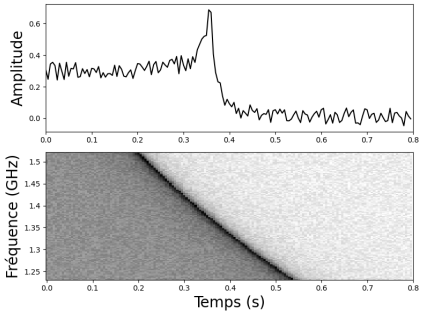


Fig 3. Signal radio détecté.

Données :

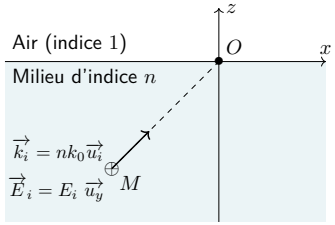
- Densité moyenne d'électrons dans l'univers : $n^\star \simeq 0,2$ m^{-3}.

1. En supposant que l'onde à été émise lors d'une impulsion de très courte durée, préciser à quelle distance à été émis ce signal.

Diélectrique (MP⋆)

EXERCICE 7 Lecteur d'empreintes (⋆⋆)

On considère une onde plane monochromatique de pulsation ω se propageant dans un diélectrique d'indice n. On s'intéresse à l'évolution de cette onde lorsqu'elle atteint une interface avec l'air en $z = 0$. On admettra la continuité des champs électrique et magnétique à l'interface. L'onde incidente arrive sur l'interface avec un angle d'incidence $i > i_\ell$, avec i_ℓ l'angle limite de réfraction. On donne la forme générale de l'onde $\underline{\vec{E}_i} = E_{0_i}\ e^{j(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{r})}\ \vec{u_y}$ avec E_{0_i} réel et $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.



Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

1. En exploitant les lois de DESCARTES, retrouver l'expression de i_ℓ en fonction de n.
2. Déterminer, en tout point $M(x,y,z)$ du diélectrique, l'expression du champ magnétique $\underset{\hookrightarrow}{\underline{B}_i}$ associé à l'onde.
3. On suppose qu'il n'existe aucun champ électromagnétique dans le vide. Proposer une écriture du champ électrique associé à l'onde réfléchie en exploitant les lois de DESCARTES. Montrer alors que la continuité des champs électrique et magnétique à l'interface ne peut pas être respectée.
4. On postule alors l'existence d'un champ électrique transmis dans le vide, de la forme $\underline{\vec{E}_t} = E_{0_t}\, g(z) e^{j(\omega t - k_t x)}\ \vec{u_y}$, où $g(0) = 1$. Montrer que la continuité du champ $\underline{\vec{E}}$ fixe la valeur de k_t et impose une relation entre E_{0_i}, E_{0_r} et E_{0_t}.
5. En déduire que $g(z) = e^{-\frac{z}{\delta}}$ où δ est une distance que l'on exprimera en fonction de λ_0, n et i. Décrire l'onde transmise obtenue.

Métal (MP⋆)

EXERCICE 8 Miroir parfait ? (⋆⋆)

On considère une onde plane progressive harmonique (OPPH) arrivant du vide ($x < 0$) en incidence normale sur un conducteur ohmique occupant le demi-espace $x > 0$. Le champ électrique incident est donné par $\underline{\vec{E_i}} = E_0 e^{i(\omega t - k_0 x)}\ \vec{u_y}$. Le métal est caractérisé par une conductivité électrique γ et une perméabilité magnétique identique à celle du vide μ_0. On se place dans le cadre de l'ARQS (les courants de déplacement sont négligés).

1. Étudier le facteur de transmission en puissance T et les courants dans le conducteur pour un métal réel puis parfait ($\gamma \to +\infty$).

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/