Barrière de potentiel (MP)

EXERCICE 1 Puits de potentiel (⋆⋆)

On considère une particule quantique évoluant dans un puits de potentiel représenté en *Figure 4*.

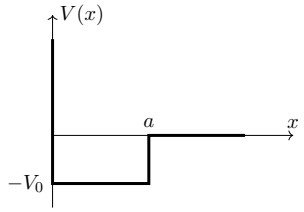


Fig 1. Puits de potentiel.

1. Écrire l'équation de Schrödinger vérifiée par la partie spatiale de l'onde.
2. Déterminer les conditions au limites et la forme que prend l'onde dans et hors du puits.
3. Déterminer la plus petite valeur de V_0 pour laquelle il existe un état lié.

EXERCICE 2 Atome de Bohr (⋆⋆)

Pour établir la stabilité du modèle de l'atome, Bohr introduit en 1913 une quantification du moment cinétique orbital L de l'électron de l'atome d'hydrogène. L'électron est alors considéré comme une particule de masse $m_e \simeq 9,1 \times 10^{-31}$ kg et de charge $-e \simeq -1,6 \times 10^{-19}$ C en orbite circulaire autour d'un proton.

Données : permittivité du vide $\varepsilon_0 \simeq 8,85 \times 10^{-12}$ F · m^{-1}.

1. Déterminer l'expression de la vitesse $v(r)$ du moment cinétique $L(r)$ et de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(r)$ de l'électron en fonction du rayon r de son orbite.
2. Justifier la conservation de $L(r)$ et de $\mathcal{E}_m(r)$.

La quantification du moment cinétique impose :

$$L = n\hbar$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = \frac{h}{2\pi} \simeq 1,05 \times 10^{-34}$ J · s.

3. Déterminer et calculer le niveau d'énergie fondamental $\mathcal{E}_1$ (pour $n = 1$) de l'électron et le rayon r_1 de l'orbite correspondante. Pour $n \neq 1$, exprimer le rayon r_n de l'orbite de l'électron en fonction de r_1.

En 1888, le physicien Johannes Rydberg établit une loi permettant de décrire les longueurs d'ondes visibles λ émises par l'atome d'hydrogène et observées par Johann Jakob Balmer en 1885.

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \qquad (1)$$

avec $m = 2$, $n \in \mathbb{N}$ et $R_H \simeq 1,09 \times 10^7$ m^{-1} appelée constante de Rydberg. Les longueurs d'ondes λ de la série de Balmer sont répertoriées dans le tableau de la *Figure 2*.

n	3	4	5	6
λ (en nm)	656	486	434	410

Fig 2. Série de Balmer.

4. Vérifier la loi de Rydberg.

Bohr postule que la transition d'un électron d'un état d'énergie $\mathcal{E}_n$ vers un état d'énergie $\mathcal{E}_m$ inférieur s'accompagne d'une émission de lumière. Le quanta d'énergie étant emporté dans le rayonnement.

5. Préciser l'expression de la *relation de* Planck-Einstein en fonction de $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_m$, h, c et λ.
6. Exprimer R_H en fonction de m_e, e, h, c et ε_0. Conclure.

EXERCICE 3 Absorption de photons (⋆⋆)

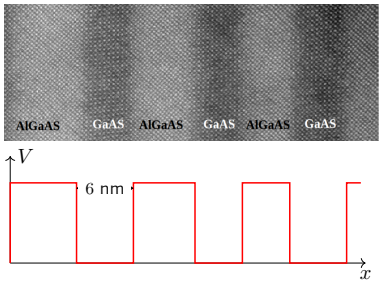


Fig 3. Hétérostructure AℓGaAs – GaAs.

1. En utilisant une analogie avec les modes propres d'une corde vibrante, déterminer l'expression des énergies accessibles $\mathcal{E}_n$ d'une particule libre de masse m confinée dans un puits quantique de largeur ℓ. On exprimera le résultat en fonction de m, de ℓ, de la constante de Planck h et d'un entier naturel n non nul.

2. Ce puits quantique peut émettre ou absorber un photon de fréquence $\nu_{n,k}$ si l'écart $\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k$ entre deux niveaux d'énergie du puits vérifie la relation 2 :

$$\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k = h\nu_{n,k} \qquad (2)$$

   a. Quelle est la signification physique de la relation (2) ?
   b. Déterminer les fréquences $\nu_{2,1}$ et $\nu_{3,1}$, ainsi que les longueurs d'onde correspondantes $\lambda_{2,1}$ et $\lambda_{3,1}$ pour un puits à semi-conducteur à base d'arséniure de gallium (AsGa), de largeur $\ell \simeq 6,0$ nm et tel que $m \simeq 0,067 m_e$ avec $m_e \simeq 9,1 \times 10^{-31}$ kg la masse de l'électron.
   c. À quel domaine du spectre appartiennent les longueurs d'onde des photons obtenues dans la question précédente ? Proposer des applications pratiques de tels puits quantiques.

Physique statistique (MP)

EXERCICE 4 Diffusion d'un parfum (⋆⋆)

1. Estimer un ordre de grandeur de la vitesse moyenne v pour des particules de gaz à la température T. On prendra $T \simeq 300$ K et $M \simeq 50$ g · mol^{-1}.
2. Si on assimile les particules du gaz à des boules de diamètre d, estimer l'ordre de grandeur du diamètre d.
3. Pour un gaz de pression $p \simeq 1$ bar et de température T estimer un ordre de grandeur de la distance moyenne entre deux chocs de ces particules. Cette distance est appelée libre parcours moyen et se note ℓ.

Au temps $t = 0$, en un point O, un opérateur appuie sur un diffuseur de parfum.

4. Montrer que $r(t) = \sqrt{v\ell t}$.
5. À quelle distance moyenne $r(t)$ se trouve une particule de ce parfum à un instant t. En déduire au bout de combien de temps la particule se trouve en moyenne à 10 cm du diffuseur.

EXERCICE 5 Cristal paramagnétique (⋆⋆)

On modélise un cristal paramagnétique par un ensemble de N spins indépendants de nombre magnétique $m_s = \pm\frac{1}{2}$. À chaque spin est associé un moment magnétique dipolaire pouvant prendre les valeurs $\pm\mu_B$. Le système est placé dans un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B_0}$ uniforme et constant, dont la direction définit l'axe de quantification des moments magnétiques.

1. Citer un exemple de système physique dont les propriétés magnétiques peuvent être décrites par ce modèle.
2. On introduit le paramètre sans dimension $a = \frac{\mu_B B_0}{k_B T}$. Proposer une interprétation physique de cette grandeur et estimer son ordre de grandeur pour $\mu_B \simeq 10^{-23}$ A · m² à température ambiante.
3. Déterminer l'expression du moment magnétique total du cristal $\mathcal{M}_s$ en fonction de a, N et μ_B. Montrer que, dans une limite que l'on précisera, on retrouve la loi de Curie :

$$\mathcal{M}_s \propto \frac{B_0}{T}$$

4. Établir l'expression de l'énergie interne U du système. En déduire la capacité thermique à champ constant associée et la comparer à celle d'un gaz parfait monoatomique.
5. Soient n_+ et n_- les nombres respectifs de spins dans les états $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. En notant $N = n_+ + n_-$, exprimer l'énergie interne U en fonction de n_+, N, μ_B et B_0.

On rappelle la définition statistique de l'entropie de Boltzmann :

$$S = k_B \ln(\Omega(N, n_+))$$

où $\Omega(N, n_+)$ représente le nombre de micro-états accessibles pour une valeur de n_+ fixée.

6. Déterminer le nombre de combinaisons $\Omega(N, n_+)$. À l'aide de la formule de Stirling, donner l'expression de l'entropie $S(n_+)$ et décrire l'allure de sa représentation graphique.
7. Calculer la quantité $\frac{\partial S}{\partial U}$ et identifier la grandeur thermodynamique à laquelle elle correspond. Commenter le signe de cette grandeur dans le cadre de ce modèle.

Données :

- Formule de Stirling : $\ln(p!) \underset{p\to+\infty}{\sim} p\ln(p) - p$.

Barrière de potentiel (MP*)

EXERCICE 6 Oscillations de Rabi (⋆⋆⋆)

On considère une particule de masse m astreinte à se déplacer dans un puits de potentiel de largeur ℓ. On note sa fonction d'onde :

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1(x) e^{-i\frac{\mathcal{E}_1}{\hbar}t} + \varphi_2(x) e^{-i\frac{\mathcal{E}_2}{\hbar}t} \right)$$

où $\varphi_1(x)$ est la solution de l'équation de Schrödinger dans l'état fondamental du système et $\varphi_2(x)$ la solution du premier niveau excité.

1. Donner l'expression de la position moyenne $\langle x \rangle$ de la particule et montrer la dépendance en t.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. Interpréter cette dépendance temporelle et calculer la période T des oscillations.
3. Trouver une équation analogue à l'équation de HEISENBERG liant T et $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$.
4. Calculer T pour un électron en mouvement autour d'un noyau d'atome.

EXERCICE 7 Électron dans un cristal (⋆⋆⋆)

On considère une électron piégé dans le défaut d'un cristal, modélisé par une cavité cubique de volume ℓ^3 et dans laquelle l'électron est libre de se déplacer. On rappelle l'équation de SCHRÖDINGER qui décrit le mouvement de cet électron, de fonction d'onde $\psi(x, y, z)$, dans la cavité :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x, y, z)\psi = \mathcal{E}\psi$$

1. Déterminer les niveaux d'énergie possibles pour l'électron. Déterminer alors la longueur d'onde des photons absorbés qui permettent une transition de l'état fondamental vers le premier état excité pour $\ell \simeq 0,5$ nm.

On considère maintenant que la cavité peut se déformer mais en gardant son volume constant ℓ^3, tel que $\ell_x = \alpha\ell$ et $\ell_y = \ell_z = \beta\ell$.

2. Déterminer la valeur de α qui minimise l'énergie du premier état excité. Quelle est alors la longueur d'onde des photons émis lors du retour du premier état excité vers le fondamental pour $\ell \simeq 0,5$ nm ?

EXERCICE 8 Puits de potentiel (⋆⋆)

On considère une particule quantique évoluant dans un puits de potentiel représenté en *Figure 4*.

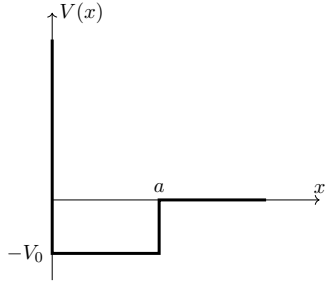


Fig 4. Puits de potentiel.

1. Déterminer la plus petite valeur de V_0 pour laquelle il existe un état lié.

Physique statistique (MP*)

EXERCICE 9 Fuite dans une cabine spatiale (⋆⋆)

Dans une cabine spatiale de volume $V_0 \simeq 10$ m³ se trouve de l'air à la température $T_0 \simeq 298$ K constante. L'une des parois est percée d'un petit trou de section s, suffisamment petit pour ne pas perturber la distribution d'équilibre du gaz à un instant t donné.

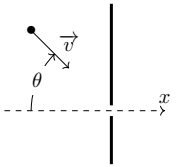


Fig 5. Particule sortant de la cabine.

On note $N(t)$ le nombre de molécules de gaz dans la cabine à l'instant t.

1. Dans quel volume dV sont contenus les atomes de vitesse $\vec{v}$ à d$\vec{v}$ près, qui vont sortir de la cabine pendant la durée dt ?
2. Quel est le nombre de ces atomes ? On utilisera la distribution de MAXWELL-BOLTZMANN .
3. Donner une équation différentielle satisfaite par $N(t)$.
4. Quelle est la durée pour que la cabine spatiale soit entièrement vidée de son air ? Proposer une application numérique pour un trou circulaire de dimension typique $0,1$ mm.

Données :

Masse moyenne d'une molécule d'air $9,6 \times 10^{-26}$ kg.
Constante de BOLTZMANN : $k_B \simeq 1,38 \times 10^{-23}$ J · K^{-1}.

EXERCICE 10 Polarisation d'orientation (⋆⋆⋆)

On considère un milieu gazeux dilué, maintenu à une température T et une pression p, constitué de molécules diatomiques asymétriques. Chaque molécule présente un moment dipolaire électrique permanent $\vec{\pi_e}$. Sous l'effet d'un champ électrique macroscopique $\vec{E}$, les dipôles tendent à s'orienter.

1. En utilisant la statistique de MAXWELL-BOLTZMANN, établir l'expression du moment dipolaire moyen $\langle\vec{\pi_e}\rangle$ d'une molécule. Faire apparaître la fonction de LANGEVIN :

$$\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\pi_e E}{k_B T}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. Définir le vecteur polarisation $\vec{\mathbb{P}}$ du milieu. Exprimer $\vec{\mathbb{P}}$ en fonction de p, T, π_e et $\vec{E}$ dans l'approximation des champs faibles ($x \ll 1$).

Par une approche locale, on considère une cavité sphérique de rayon R mésoscopique centrée en un point M du gaz, uniformément polarisée. Cette cavité sphérique est obtenue en ajoutant deux charges électriques sphériques opposées distantes de $d \ll R$.

3. Déterminer le champ local (champ de LORENTZ) $\vec{e}$ ressenti par une molécule en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{\mathbb{P}}$. Montrer que :

$$\vec{e} = (1 + \chi_e)\vec{E}$$

en exprimant χ_e à partir de p, π_e, k_B et T.

EXERCICE 11 Particules à deux états (⋆)

Soit un système constitué de N particules en équilibre à la température T et dont chacune peut avoir deux valeurs d'énergie $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$, avec $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ (système à deux niveaux). Soit N_1 le nombre de particules d'énergie $\mathcal{E}_1$ et N_2 le nombre de particules d'énergie $\mathcal{E}_2$.
Nous supposons que la répartition sur les niveaux d'énergie suit la loi statistique de BOLTZMANN :

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\Delta\mathcal{E}}{k_B T}}$$

1. Exprimer l'énergie interne U en fonction de N_1, N_2, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ et sa différentielle dU en fonction de dN_1 et $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$.
2. Exprimer l'entropie du système S en fonction de k_B, N et N_1 en admettant l'expression de la formule de STIRLING pour N grand : $\ln(N!) = N\ln(N)$. Exprimer alors la différentielle de l'entropie dS en fonction de $\Delta\mathcal{E}$, dN_1 et T.
3. Montrer que l'on retrouve l'identité thermodynamique.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/