1 – Électrostatique/Magnétostatique *Mercredi 13 mai*

Électrostatique (MP)

EXERCICE 1 Potentiel de Yukawa (⋆⋆)

À une distance r d'un proton de charge q au point O, le potentiel créé par une distribution de charges à symétrie sphérique est donné par l'expression :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a}}$$

où $q > 0$, $a = \text{cste} > 0$.

1. Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(r)$ à une distance r du point O. À l'aide du flux Φ_E de ce champ à travers la sphère $S(O,r)$, déduire la charge $Q(r)$ contenue dans cette sphère. Que devient-elle quand r (le rayon de la sphère de Gauss) tend vers zéro puis vers l'infini ? Interpréter.
2. Calculer la densité volumique de charges $\rho(r)$ en un point situé à une distance r du point O. Calculer la somme $q'(r)$ des charges négatives contenues dans la sphère $S(O,r)$. Que devient cette quantité quand r tend vers 0 puis vers l'infini ?
3. Étudier la variation en fonction de r, de la grandeur $z(r) = 4\pi r^2 |\rho(r)|$ appelée densité radiale de charges. Conclure sur la zone où l'on a le plus de chance de trouver l'électron. Donner la valeur du premier rayon de Bohr.

Données :

$$\text{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 E_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)E_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$$

EXERCICE 2 Soleil couchant (⋆⋆)

1. Proposer une expression du champ électromagnétique causé par le Soleil (champ électrique, champ magnétique et vecteur de Poynting).

On admet que le champ électrique rayonné par un dipôle oscillant s'écrit :

$$\overrightarrow{E_r} \simeq \mu_0 \frac{\sin(\theta)}{4\pi r}\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

où p est le moment dipolaire du dipôle.

2. Déterminer $\overrightarrow{B_r}$.
3. Donner la puissance des rayons issus du dipôle. Une primitive de $\sin^3(x)$ est $\frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x)$.
4. Interpréter par rapport aux rayons du Soleil.
5. On admet que le dipôle p est proportionnel au champ électrique qui le crée. Donner alors la puissance des rayons issus du dipôle.
6. Expliquer la couleur du ciel lors d'un coucher de Soleil.

EXERCICE 3 Gaz ionisé (⋆⋆)

On considère un plasma totalement ionisé et neutre.

1. Estimer la distance moyenne entre deux électrons d en fonction de la densité moyenne de particules n_0. En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ des deux électrons en fonction de e, ε_0, n_0.
2. Exprimer l'énergie cinétique moyenne $\mathcal{E}_c$ en fonction de k_B et T. On définit $\Gamma = \frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_c}$. Donner un ordre de grandeur pour l'ionosphère terrestre avec $T \simeq 10^2$ K et $n_0 \simeq 10^{12}$ m^{-3}.
3. Exprimer la densité de charge des protons et des électrons en fonction de k_B, T, e, $V(r)$.
4. Démontrer l'équation de Poisson.
5. Démontrer que le potentiel électrique s'écrit :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

Exprimer λ.

6. Déterminer l'échelle pour que le plasma reste neutre. Quel phénomène est mis en évidence ?
7. Calculer λ pour l'ionosphère. Faire un commentaire.

Magnétostatique (MP)

EXERCICE 4 Éclair (⋆⋆)

Un éclair frappe verticalement le sol. Il est modélisé par un fil infini parcouru par un courant $I \simeq 30$ kA. Le sol est représenté par le demi-espace $z < 0$.

1. Déterminer la direction, le sens et l'intensité du champ magnétique $\overrightarrow{B}(r)$ autour de l'éclair à une distance r.
2. En notant r la distance au point d'impact, décrire la densité volumique de courants $j(r)$ pour une répartition homogène en surface puis en volume. En déduire une expression du potentiel $V(r)$.
3. Un individu situé à une distance d du point d'impact se tient debout, ses deux jambes distantes de p. Déterminer la différence de potentielle imposée entre ses deux pieds touchant le sol.

Au-delà de 3 A, les brûlures infligées au corps humain lui sont souvent fatales. On considère un corps humain de résistance électrique $R \simeq 1000\ \Omega$. La conductivité électrique du sol est estimée à $\sigma \sim 10^{-2}$ S · m^{-1}.

4. À quelle distance du point d'impact doit être situé l'humain pour survivre à l'éclair ?

Il est conseillé, en cas de risque d'être frappé par la foudre, d'avoir des chaussures avec semelle isolante épaisse.

5. Justifier ce conseil.

EXERCICE 5 Pression magnétique (⋆⋆)

Un « manchon » cylindrique conducteur creux d'axe Oz, infiniment long a pour rayon intérieur R et pour rayon extérieur $R + e$. Il est parcouru par un courant permanent I, de densité $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{u_z}$ uniforme dans le conducteur.

1. **a.** Exprimer le vecteur densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ en fonction de I, e et R.
   b. Si $e \ll R$, montrer que l'on peut assimiler la distribution de courant à une nappe surfacique cylindrique à condition d'introduire un vecteur densité surfacique de courant $\overrightarrow{j}_S$ que l'on exprimera en fonction de j et e.
2. On revient à la description volumique. Calculer le champ $\overrightarrow{B}$ en tout point de l'espace.
3. On se place dans l'hypothèse $e \ll R$. Exprimer $\overrightarrow{B}$ en tout point intérieur ; on pose : $r = R + u$ et on linéarisera l'expression de $B(u)$.
4. On cherche à déterminer l'action mécanique de $\overrightarrow{B}$ sur le conducteur lui-même.
   a. Calculer la force de Laplace subie par un élément de volume : on mettra cette force sous la forme : $\mathrm{d}^3\overrightarrow{F} = f(u)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}u\,\overrightarrow{u_r}$.
   b. En déduire l'expression de la force magnétique appliquée à un élément de tube d'aire d^2S.
   c. Définir et calculer la pression magnétique p_m en fonction de I et R.
   d. $I \simeq 1000$ A, $R \simeq 1,0$ cm, $\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7}$ H · m^{-1}. Calculer p_m. Commenter.

Électrostatique (MP*)

EXERCICE 6 Nuage électronique (⋆⋆)

Un système de charges crée le potentiel à symétrie sphérique :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{r}{a}\right)e^{-\frac{2r}{a}}$$

1. Calculer $Q(r)$, la charge comprise dans la sphère de rayon r.
2. Caractériser la densité volumique de charges $\rho(r)$ correspondant à ce potentiel.
3. Représenter l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}(r)$ d'un électron de charge $-q$ évoluant dans le potentiel $V(r)$. Définir l'énergie de liaison de ce système.

Données :
$\text{div}\,(E) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r^2E}{\mathrm{d}r}$

EXERCICE 7 Piège à poussière (⋆⋆)

On considère un condensateur cylindrique vertical de hauteur h dont le cylindre intérieur permet de capturer la poussière.

On modélise la poussière qui le traverse par des particules de masse m allant de haut en bas avec une vitesse selon l'axe vertical $v_v = \text{cte}$, et portant un moment dipolaire $\overrightarrow{p} = \alpha\overrightarrow{E}$.

1. À quelles conditions sur les paramètres du condensateur et sur la vitesse verticale v_v, les particules seront capturées avant de sortir du condensateur ?

EXERCICE 8 Condensateur HF (⋆⋆⋆)

On considère un condensateur constitué de deux disques de rayon R placés en regard l'un de l'autre.

1. Déterminer le champ électrique entre les plaques.
2. Qu'advient-il lorsque le dispositif est soumis à un courant alternatif à haute fréquence ?

Magnétostatique (MP*)

EXERCICE 9 Effet Larmor (⋆⋆⋆)

Une particule P de masse m et de charge négative $-q$ est soumise à la force électrique d'une charge positive q' placée à l'origine O d'un référentiel $\mathcal{R}_g$ et à un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ orthogonal au plan de la trajectoire.

1. Décrire la trajectoire de P en l'absence puis en présence du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ considéré comme une petite perturbation. On note $\mathcal{R}$ le référentiel tournant par rapport à $\mathcal{R}_g$ à la vitesse angulaire de Larmor $\omega_L = -\frac{qB}{2m}$.
2. Montrer que le théorème du moment cinétique peut s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{\sigma} + \frac{1}{2}q\overrightarrow{r}\wedge\left(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{r}\right)\right) = \frac{q}{2m}\overrightarrow{\sigma}\wedge\overrightarrow{B}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Interpréter le terme $\frac{1}{2}q\overrightarrow{r}\wedge\left(\overset{\hookrightarrow}{B}\wedge\overrightarrow{r}\right)$ et montrer qu'il est négligeable si la vitesse angulaire ω_L est très petite devant la vitesse angulaire moyenne de la particule sur son orbite.

EXERCICE 10 Supraconducteur (⋆⋆⋆)

On considère une onde dans un milieu supraconducteur qui vérifie la loi locale :

$$\overrightarrow{j}=\gamma\overrightarrow{E}-\frac{1}{\mu_0\lambda^2}\overrightarrow{A}\quad\text{avec}\quad\overset{\hookrightarrow}{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)=\overset{\hookrightarrow}{B}$$

avec $\overrightarrow{j}$ la densité volumique de courant dans un matériau de conductivité γ. $\overrightarrow{E}$ et $\overset{\hookrightarrow}{B}$ sont les champs électrique et magnétique ambiants.

1. Trouver l'équation de dispersion dans le milieu.

Un champ magnétique uniforme $\overset{\hookrightarrow}{B}=B_0\,\overrightarrow{u_y}$ parallèle à la face de gauche du supraconducteur est ajouté. On ne considère qu'un régime basse fréquence pour lequel $\overrightarrow{j}=-\frac{1}{\mu_0\lambda^2}\overrightarrow{A}$.

2. Déterminer la force surfacique subie par le conducteur.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/